

CALCUL DES PERFORMANCES D'UNE TUYÈRE PROPULSIVE CONVERGENTE
COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE

M. Fenain*, L. Dutouquet** et J.L. Solignac***

Sommaire

Dans une première partie nous présentons, pour les écoulements méridiens, une formulation en variables hodographiques assez proche de la formulation relative aux écoulements plans et se prêtant, de ce fait, à l'application des principes de résolution numérique retenus à l'ONERA (1) (2) (M. Fenain), en particulier pour le traitement des problèmes mixtes d'écoulements subsoniques-supersoniques pour lesquels les schémas elliptique et hyperbolique doivent être couplés.

Dans une deuxième partie on décrit et commente les programmes de jets subsoniques ou supersoniques (bloqués ou non) tels qu'ils ont été mis au point à la SNECMA (L. Dutouquet) pour permettre la détermination de l'écoulement dans les tuyères coniques ou cylindro-coniques ainsi que le calcul des performances de ces tuyères tant en ce qui concerne la poussée que le débit.

Enfin dans une troisième partie nous comparons les résultats de calcul aux essais entrepris à l'ONERA (J.L. Solignac) par des méthodes interférométriques.

I - Formulation - Principes de base

I.1 - Equations -

Dans le cas d'écoulements bidimensionnels, permanents et irrotationnels (donc isentropiques) d'un fluide parfait compressible, on peut introduire un potentiel des vitesses φ et une fonction de courant ψ , adimensionnées, et définir par

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= u dx + q dr \\ d\psi &= -r\rho q dx + r\rho u dr \end{aligned} \right\} \quad (I.1)$$

où x et r sont les coordonnées cartésiennes sans dimension du plan méridien, u et q les composantes du vecteur vitesse, de module rapporté à la vitesse non nulle d'un certain état de référence, et $\rho = \rho(V)$ la masse spécifique rapportée à la valeur de la masse spécifique au même état.

Si V et θ sont le module et l'orientation du vecteur vitesse, on a

$$u = V \cos \theta, \quad q = V \sin \theta \quad (I.2)$$

L'état de référence qui se prête le mieux à l'étude des écoulements subsoniques-supersoniques est l'état critique pour lequel le nombre de Mach M est égal à l'unité. C'est celui que nous retiendrons.

* Maître de Recherches - ONERA Châtillon - France

** Ingénieur - SNECMA Villaroche - France

*** Chef de groupe de Recherches - ONERA Chalais-Madon - France

On note

$$z = x + ir \quad (I.3)$$

l'affixe d'un point du plan méridien et

$$w = u - iq = V e^{i\theta} \quad (I.4)$$

la vitesse complexe.

Si on forme $w dz = (u - iq)(dx + i dr)$ on trouve, compte tenu de (I.1)

$$w dz = d\varphi + \frac{i}{\rho r} d\psi \quad (I.5)$$

Posons

$$y = r^2/2 \quad (I.6)$$

et, pour simplifier l'écriture,

$$\tilde{V} = \log V, \quad V = e^{\tilde{V}} \quad (I.7)$$

Si on écrit que dz est une différentielle totale exacte, on forme un système en φ, ψ soit

$$\left. \begin{aligned} r \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{V}} \\ r \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{V}} &= \frac{B^2}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{J}{2\rho y} \end{aligned} \right\} \quad (I.8)$$

où

$$B^2 = M^2 - 1, \quad J = \frac{D(\psi, y)}{D(\tilde{V}, \theta)}$$

L'élimination de φ dans (I.5) conduit à

$$\begin{aligned} r dz &= \frac{1}{\rho w} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{V}} + i \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \left(B^2 \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + i \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{V}} + \frac{J}{2y} \right) d\tilde{V} \right] \\ &= r dx + i dy \end{aligned} \quad (I.9)$$

d'où l'on tire, en séparant partie réelle et partie imaginaire,

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{1}{\rho V} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{V}} + \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \quad (I.10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \tilde{V}} = \frac{1}{\rho V} \left(\cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{V}} + B^2 \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{J \sin \theta}{2y} \right)$$

et

$$r \frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{1}{\rho V} \left(\cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{V}} - \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \quad (I.11)$$

$$r \frac{\partial x}{\partial \tilde{V}} = \frac{1}{\rho V} \left(-\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{V}} + B^2 \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{J \cos \theta}{2y} \right)$$

Notons que les équations (I.10) se réduisent formellement à celles de l'écoulement plan quand on y fait $J=0$.

Le système (I.10) en y, ψ régit à lui seul, en

variables hodographiques, les écoulements méridiens puisque le terme $J \sin \theta / 2y$ s'exprime en y et ψ .

Les grandeurs α et φ peuvent être calculées a posteriori, après résolution en y, ψ .

Si on dérive respectivement par rapport à \tilde{V} et θ les deux équations (I.10) et si on égale ces dérivées, on obtient, en revenant à V (I.7),

$$\mathcal{P}(\psi) = (1-M^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + V^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2} + (1+M^2) V \frac{\partial \psi}{\partial V} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (I.12)$$

avec $F = J \sin \theta / 2y$

L'équation $\mathcal{P}(\psi) = 0$ n'est autre que l'équation de Steichen qui régit les écoulements plans.

La fonction F peut s'exprimer sans les dérivées de y qu'il suffit de remplacer dans J par leur expression donnée par (I.10). On peut donc écrire

$$F = \frac{\sin^2 \theta \left[V^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial V} \right)^2 - B^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 \right]}{2y\rho V + \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}} \quad (B^2 = M^2 - 1) \quad (I.13)$$

I.1.1 - Exemple d'écoulement méridien

Pour illustrer ce qui précède rappelons la solution connue, dite solution "radiale", pour laquelle $\psi = \psi(\theta)$. On a

$$\left. \begin{aligned} \psi &= 1 - \cos \theta, \quad y = \frac{\sin^2 \theta}{2\rho V}, \quad F = -\frac{B^2 \sin^2 \theta}{2} \\ x &= -\frac{\cos \theta}{\sqrt{\rho V}}, \quad r = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{\rho V}} \rightarrow x^2 + r^2 = \frac{1}{\rho V} \end{aligned} \right\} \quad (I.14)$$

c'est un écoulement conique, centripète en subsonique et centrifuge en supersonique, la ligne sonique étant, dans le plan méridien, le cercle $x^2 + r^2 = 1$.

I.2 - Jet subsonique

Considérons l'écoulement subsonique d'un fluide débouchant d'un convergent conique, semi-infini (fig. I.1)

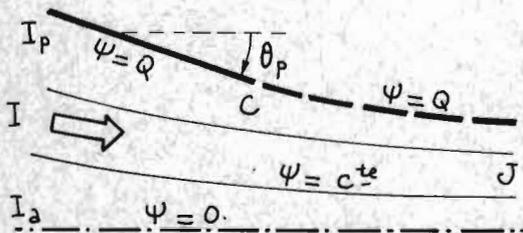


Figure I.1

A l'amont I où la vitesse est nulle l'écoulement est radial et ψ se comporte en $1 - \cos \theta$ [cf (I.14)]. Sur l'axe $r = 0, \psi = 0$ et, sur la paroi $\theta = \theta_p, \psi = Q = 1 - \cos \theta_p$.

Sur la ligne de jet issue de l'extrémité C du convergent la vitesse est $V = V_j < 1$ et la fonction ψ conserve la valeur Q .

A l'infini aval J l'écoulement tend vers l'écoulement uniforme, de vitesse V_j , parallèle à l'axe.

L'hodographe (fig. I.2) est limité, dans le plan V, θ au rectangle $\theta_p \leq \theta \leq 0, 0 \leq V \leq V_j$.

Sur $\theta = 0$ (image de l'axe) $\psi = 0$; sur $V = 0$ (écoulement radial) $\psi = 1 - \cos \theta$; sur $\theta = \theta_p$ (paroi) et sur $V = V_j$ (ligne de jet) $\psi = Q = 1 - \cos \theta_p$.

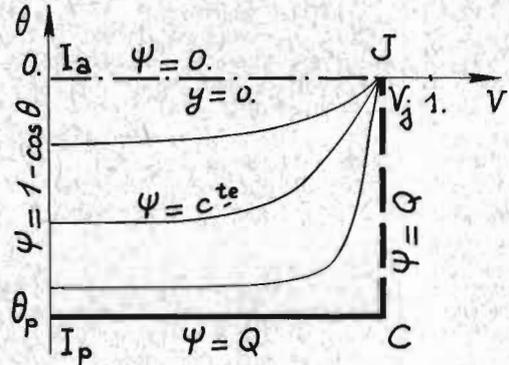


Figure I.2

Les lignes de courant issues de $V = 0$ convergent toutes vers le point $J (V = V_j, \theta = 0)$ où la solution comporte une singularité du type "source".

Faisons provisoirement abstraction de cette singularité.

Avec les valeurs sur le contour telles qu'elles sont affichées ci-dessus, on calcule ψ dans le champ hodographique en résolvant, par différences finies, l'équation $\mathcal{P}(\psi) = 0$. On procède donc comme en écoulement plan. Le problème est analogue, à la condition sur $V = 0$ près, où, en écoulement plan, on aurait $\psi = \theta$.

Autrement dit on suppose, en première itération, que $F = 0$.

Quand la résolution en ψ est terminée on calcule y en intégrant la première équation (I.10) sur les iso- V sachant que $y = 0$ sur $\theta = 0$.

Au voisinage de $V = 0, y$ est très grand puisque la valeur asymptotique pour $V \rightarrow 0$ est, d'après (I.14) $y = \sin^2 \theta / 2\rho V$.

Il y a lieu de poser

$$\mathcal{Y} = \rho V y \quad (I.15)$$

On a

$$\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \theta} = \sin \theta V \frac{\partial \psi}{\partial V} + \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (I.16)$$

et, sur $\theta = 0, \mathcal{Y} = 0$.

On intègre donc (I.16), iso- V par iso- V , à l'exclusion de $V = 0$ où $\mathcal{Y} = \sin^2 \theta / 2$ et de $V = V_j$ (ligne de jet) où le calcul est inutile au cours de la résolution.

Le calcul de \mathcal{Y} terminé, on forme F , par (I.13) où $\rho V y = \mathcal{Y}$, ceci afin de connaître le second membre de l'équation (I.12). Pour $V = 0, F = -B^2 \sin^2 \theta / 2$ pour $\theta = 0, F = 0$.

Le second membre de (I.12) étant calculé en chaque point du réseau, on calcule à nouveau ψ puis \mathcal{Y} et F , et l'on poursuit ainsi de suite jusqu'à convergence. La convergence atteinte on

peut intégrer, sur $V=V_j$,

$$\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \theta} = \sin \theta V_j \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial V}$$

à partir de \mathcal{J} où $\mathcal{Y}=Q$ d'après la conservation du débit.

Connaissant \mathcal{Y} on peut revenir à $y=\mathcal{Y}/\rho V$ et à $r=\sqrt{2y}$. On peut de même calculer x en intégrant (I.11).

Le processus que nous venons de décrire s'applique, en pratique, non pas à la fonction ψ mais à une fonction χ ne présentant pas de singularité en \mathcal{J} (fig. I.2). On pose $\psi = \chi + \psi_j$, ψ_j représentant le terme principal du comportement de ψ en \mathcal{J} . Il nous faut donc préciser ce comportement qui correspond à une singularité du type "source".

I.2.1 - Singularité du type "source"

En $V=V_j, \theta=0$ où les lignes de courant convergent, on a $\rho=\rho_j, M=M_j, B_j^2=1-M_j^2$
Si

$$\frac{V}{V_j} - 1 = \xi_j = R_j \cos \omega_j; \frac{\theta}{B_j} = \eta_j = R_j \sin \omega_j \quad (I.17)$$

on doit avoir, au voisinage de $R_j=0$,

$$\psi = \psi_j(\omega_j) + \text{termes nuls avec } R_j.$$

On ne fait aucune hypothèse sur l'ordre en R_j du terme qui suit $\psi_j(\omega_j)$ car on ne s'intéresse qu'au terme principal. Au voisinage de $R_j=0$,

$$\psi = \psi_j(\omega_j) + \dots; y = \frac{1}{\rho_j V_j} \psi_j(\omega_j) + \dots; F = F_j(\omega_j) + \dots$$

Sans entrer dans le détail du calcul, quand on tient compte des équations qui régissent les écoulements étudiés, et des conditions

$$\psi_j = y_j = 0 \quad \text{pour } \omega_j = -\pi$$

$$\psi_j = y_j = Q \quad \text{pour } \omega_j = -\pi/2,$$

on trouve, en introduisant le paramètre t ,

$$\omega_j = -\pi + \arctg \left[\frac{J_1(2t)}{J_0(2t)} \right] \quad (I.18)$$

(J_0 et J_1 étant les fonctions de Bessel) et

$$\psi_j = y_j = \mathcal{Y}_j = Q t^2 / t_0^2 \quad (I.19)$$

$$F_j = Q B_j^2 \sin^2 \omega_j t'(\omega_j) / t_0^2 \quad (I.20)$$

avec

$$t'(\omega) = t / (2t - \sin \omega \cos \omega) \quad (I.21)$$

et où $t_0 = 1.20241278$ est tel que $J_0(2t_0) = 0$.

Afin d'avoir explicitement $t(\omega_j)$ nous avons défini une représentation polynomiale de cette fonction, précise à un ordre connu à l'avance et cohérent avec la précision des résolutions.

I.2.2 - Résolution

Pour tenir compte de la singularité "source" en \mathcal{J} , mais pour travailler sur une fonction régulière, on pose donc

$$\psi = \chi + \psi_j \quad (I.22)$$

Pour simplifier on rapporte ψ à $Q=1-\cos \theta_p$, ce qui revient à faire $Q=1$ dans ψ_j, y_j, F_j .

Sur la frontière du domaine hodographique on a

$$\text{sur } \theta=0 \quad \text{et sur } V=V_j: \quad \chi=0$$

$$\text{sur } \theta=\theta_p: \quad \chi=1-\psi_j(\omega_j)$$

$$\text{sur } V=0: \quad \chi = \frac{1-\cos \theta}{1-\cos \theta_p} - \psi_j(\omega_j)$$

On résout

$$\mathcal{P}(\chi) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \mathcal{P}(\psi_j) \quad (I.23)$$

avec

$$\mathcal{P}(\psi_j) = \left(\frac{B_j^2 \xi_j^2 + V_j^2 \eta_j^2}{B_j^2} \right) \frac{\psi_j''}{R_j^4} - (1+M^2) \frac{V_j \eta_j}{V_j R_j^3} \psi_j' \quad (I.24)$$

$$- \left(\frac{B_j^2}{B_j^2} - \frac{V_j^2}{V_j^2} \right) \frac{2 \xi_j \eta_j}{R_j^4} \psi_j'$$

où

$$\psi_j' = 2t t'(\omega_j) / t_0^2$$

$$\psi_j'' = 2(2 \cos^2 \omega_j - 2t' + 1) t'^2 / t_0^2, \quad B^2 = 1 - M^2$$

et, en première itération, $F=0$.

On calcule $\mathcal{Y} = \mathcal{Y} - \mathcal{Y}_j$ par intégration de

$$\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \theta} = \sin \theta V \frac{\partial \chi}{\partial V} + \cos \theta \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \frac{1}{R_j^2} \left[\frac{\xi_j}{B_j} (\cos \theta - 1) - \frac{V_j \sin \theta \eta_j}{V_j} \right] \psi_j' \quad (I.25)$$

la valeur de \mathcal{Y} sur $\theta=0$ étant nulle.

I.2.3 - Tuyère cylindro-conique

Le cas de la tuyère cylindro-conique (fig. I.3) avec écoulement uniforme à l'infini amont est voisin du cas considéré précédemment mais comporte, dans l'hodographe, deux singularités "source" aux points I et J images des infinis amont et aval (fig. I.4)

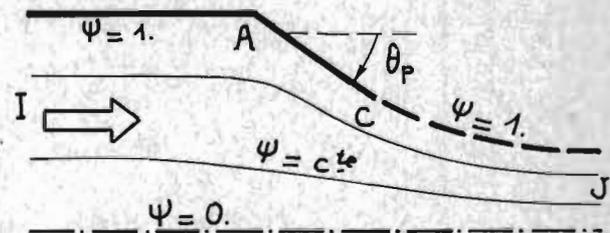


Figure I.3

On suppose ψ rapporté au débit. On a alors les conditions aux frontières indiquées sur la fig. I.4

Si, en I, $V=V_\infty, M=M_\infty, B_\infty^2=1-M_\infty^2$, on introduit, par analogie avec (I.17), des variables polaires locales

$$\frac{V}{V_\infty} - 1 = \xi_\infty = R_\infty \cos \omega_\infty; \frac{\theta}{B_\infty} = \eta_\infty = R_\infty \sin \omega_\infty \quad (I.26)$$

La fonction t relative au point I est alors donnée implicitement par

$$\operatorname{tg} \omega_\infty = \frac{J_1(2t)}{J_0(2t)} \quad (I.27)$$

pour $-t_1 \leq t \leq 0$

avec $t_1 = 1,915853$ tel que $\mathcal{J}_1(2t_1) = 0$.

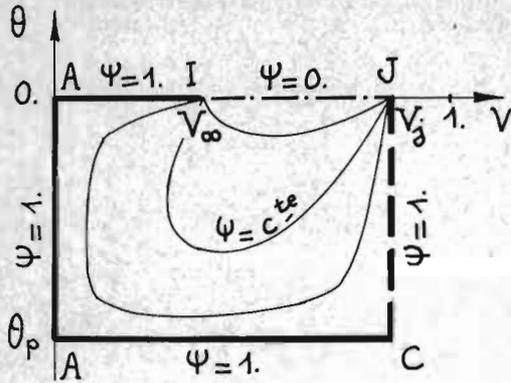


Figure I.4

Compte tenu des conditions sur $\theta=0$, au voisinage de I , les termes à retrancher en I sont

$$\psi_\infty = \gamma_\infty = \chi_\infty = t^2/t_1^2 \quad (I.28)$$

$$F_\infty = B_\infty^2 \sin^2 \omega_\infty t'(\omega_\infty)/t_1^2 \quad (I.29)$$

t' étant donné par (I.21).

Dans le cas de la tuyère cylindro-conique on pose donc

$$\psi = \chi + \psi_j + \psi_\infty \quad (I.30)$$

et l'on résout

$$\mathcal{F}(\chi) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta} - \mathcal{F}(\psi_j) - \mathcal{F}(\psi_\infty) \quad (I.31)$$

I.3 - Jet supersonique

Le jet supersonique de révolution ($V_j > 1$) peut être traité comme le jet plan (2) en couplant les schémas à 5 points, à 3 points et à 4 points, relatifs aux régions subsonique, sonique et supersonique non indépendantes. L'écoulement est radial ou uniforme à l'infini amont. Dans ce dernier cas il y a lieu de maintenir dans l'hodographe une singularité "source" à l'image de l'infini amont.

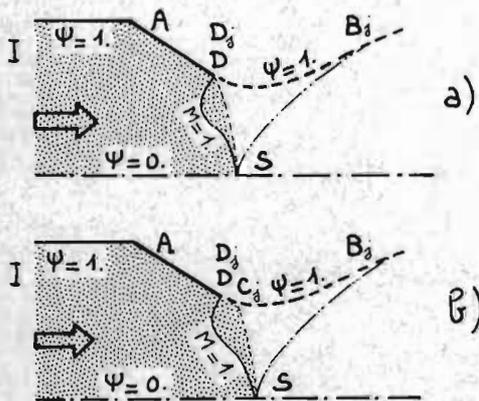


Figure I.5

Considérons le cas du jet bloqué (fig. I.5a), l'écoulement étant uniforme à l'amont.

Bien que la région comprise entre la ligne sonique DS et la caractéristique descendante issue de D aboutissant en S (frontière transsonique) soit supersonique, elle influence le subsonique. La résolution numérique doit donc être effectuée dans le domaine hodographique correspondant tout entier, l'équation régissant un tel écoulement étant de type mixte elliptique-hyperbolique. Ce domaine hodographique (fig. I.6a) est limité en supersonique par la caractéristique DD_f , image de la détente et par la caractéristique descendante SD_f (frontière transsonique).

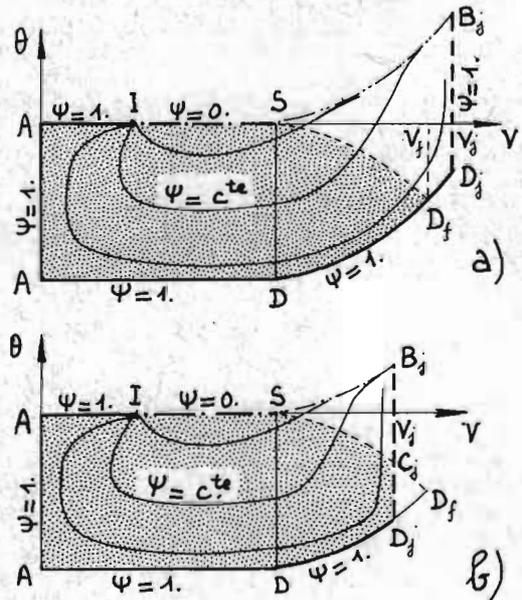


Figure I.6

Sur l'arc DD_f on doit avoir $\psi=1$, comme sur $IAAD$. Sur IS on a toujours $\psi=0$ mais sur SD_f aucune condition ne peut être imposée (problème de Tricomi). Si la vitesse V_j sur la ligne de jet est supérieure à la vitesse V_f en D_f , le domaine hodographique est prolongé, en supersonique, d'une région limitée par l'arc de caractéristique $D_f D_j$ (détente) et par la ligne de jet $V=V_j$ passant par D_j sur lesquels $\psi=1$.

Dès que la résolution a été effectuée dans le domaine $SIAADD_f S$, ψ est connu sur SD_f . On peut poursuivre le calcul dans la région hodographique $SD_f D_j B_j S$, SB_j étant la caractéristique montante issue de S . On peut également faire le calcul dans le plan de l'écoulement, par la méthode des caractéristiques.

Dans le cas du jet non bloqué $V_j < V_f$ (fig. I.5b et fig. I.6b) le domaine mixte où la résolution doit être couplée est $SIAADD_j C_j S$, ouvert sur SC_j .

I.3.1 - Résolution mixte couplée

Pour la résolution mixte couplée on procède comme en écoulement plan (1), en conservant les variables V, θ en subsonique et en transsonique et en adoptant, en supersonique, les variables canoniques W, θ où W est défini par

$$W = \frac{1}{m} \arctg(mB) - \arctg B \quad (I.32)$$

avec

$$B^2 = M^2 - 1 = \frac{V^2 - 1}{1 - m^2 V^2}, \quad m^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

L'équation (I.12) prend la forme

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial W^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\gamma+1}{2} \frac{M^2}{B^2} \frac{\partial \psi}{\partial W} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta} \quad (I.33)$$

où

$$\tilde{F}(\theta, W) = \frac{F}{B^2} = \frac{\sin^2 \theta \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial W} \right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 \right]}{2\gamma \rho \gamma + \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}}$$

En écoulement plan les caractéristiques sont les parallèles

$$\lambda = \theta + W \quad ; \quad \mu = \theta - W \quad (I.34)$$

aux première et seconde bissectrices. En écoulement méridien seule la ligne $\lambda = \theta_p + W$ est une caractéristique ; c'est l'image de la détente.

Le maillage est constitué, en subsonique, de lignes $iso-\theta$ et de lignes $iso-V$, respectivement distantes de h et de \tilde{h} (fig. I.7).

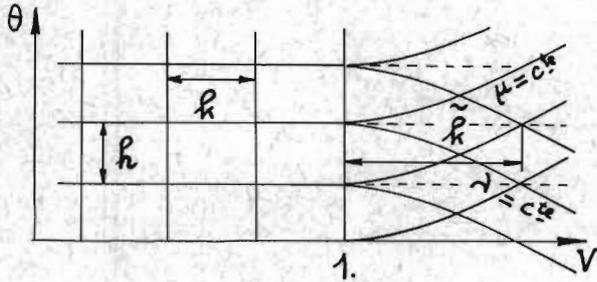


Figure I.7

Dans le plan V, θ la première intersection des lignes $\lambda = c^* \theta$ et $\mu = c^* \theta$ située sur les $iso-\theta$ du maillage subsonique est à la distance \tilde{h} de la ligne sonique (fig. I.7), distance telle que

$$\tilde{h} = (1+B^2)^{1/2} (1+m^2 B^2)^{-1/2} - 1$$

avec

$$h = \frac{1}{m} \arctg(mB) - \arctg B$$

Quand h est fixé on connaît donc \tilde{h} .

La discrétisation de l'équation (I.12) conduit en subsonique à un schéma classique à 5 points. En transsonique, plus précisément sur la ligne sonique $M=1 (V=1)$, l'équation se réduit à

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial V} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (I.35)$$

Le schéma transsonique à 3 points, traduisant l'équation (I.35) est

$$\psi_0 = \frac{\tilde{h}(1+\tilde{h})}{\tilde{h}+\tilde{h}} \psi_1 + \frac{\tilde{h}(1-\tilde{h})}{\tilde{h}+\tilde{h}} \psi_{-1} - \frac{\tilde{h}\tilde{h}}{2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)_{M=1} \quad (I.36)$$

où, à θ fixé, ψ_1 , ψ_0 et ψ_{-1} sont les valeurs de ψ sur $V=1-\tilde{h}$, $V=1$ et $V=1+\tilde{h}$.

En supersonique le maillage adopté est constitué des lignes $\lambda = c^* \theta$ et $\mu = c^* \theta$ (fig. I.8). Le schéma discret traduisant (I.33) appliquée au centre O d'une maille entière est

$$(1-A_0 h/4) \psi_1 - \psi_2 + (1+A_0 h/4) \psi_3 - \psi_4 = \frac{h^2}{4} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)_0 \quad (I.37)$$

A_0 étant la valeur du terme $\frac{(\gamma+1)M^2}{2B^2}$ en O , le second nombre étant lui aussi calculé en ce point.

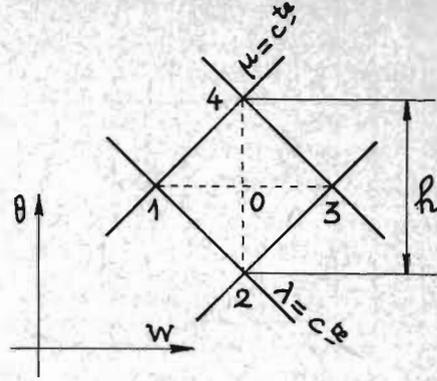


Figure I.8

Nous pouvons maintenant préciser le processus de résolution couplée. Prenons l'exemple simple où la vitesse V_j est telle qu'il n'y ait en supersonique que des mailles entières (fig. I.9). En subsonique on parcourt le réseau dans le sens des vitesses croissantes et, à l'aide du schéma à 5 points, on calcule ψ (ou χ) jusqu'à la ligne $V=1-\tilde{h}$. Par le schéma transsonique on détermine ψ (ou χ) sur la ligne sonique puis, par le schéma supersonique, on calcule ψ (ou χ) au point homologues de 4 dans la fig. I.8 avec les valeurs connues en 1, 2 et 3. Pour que les valeurs aux frontières soient prises en charge immédiatement et correctement, le processus doit démarrer sur la ligne $\theta = \theta_p + h$ (fig. I.9)

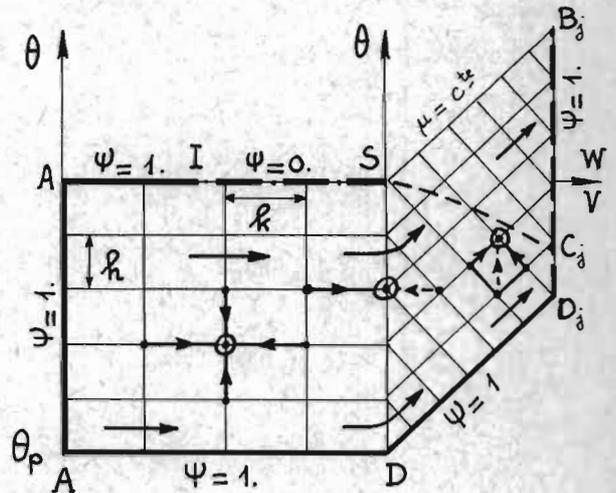


Figure I.9

Si l'on avait affaire à un écoulement plan on ne couplerait avec le subsonique que le triangle supersonique SDD_j et l'on résoudreait ensuite le triangle $SD_j B_j$ par un schéma explicite à partir des valeurs sur D_j, B_j et sur SD_j . Comme en écoulement méridien le domaine à coupler est limité par la caractéristique SC_j inconnue a priori et comme de toute façon on doit procéder par itération en recalculant progressivement ψ , on poursuit le calcul sur les droites $\mu = c^* \theta$ jusqu'au point le plus proche de la ligne de jet $D_j B_j$. On couple ainsi avec le subsonique le domaine $SDD_j B_j$ bien qu'une partie de ce domaine n'influence pas le subsonique.

II - Analyse numérique - Programmation

II.1 - Présentation des programmes

On considère deux types de convergents de révolution : les convergents coniques (plus précisément tronconiques) et les convergents cylindro-coniques. Dans le premier cas l'écoulement est radial à l'infini amont alors que dans le second il est uniforme, parallèle à l'axe du cylindre.

Pour chaque configuration le régime est subcritique ou supercritique suivant que le jet débouchant du convergent est subsonique ou supersonique. Dans le plan de l'hodographe, on a à résoudre un problème de Dirichlet pour le jet subsonique et un problème de Tricomi pour le jet supersonique.

Les quatre programmes mis au point sont désignés par les symboles DR, TR, DU, TV selon que l'on a affaire à un problème de Dirichlet (D) ou à un problème de Tricomi (T) et que l'écoulement à l'infini amont est radial (R) ou uniforme (U). Les programmes DR et TU comportent, en subsonique, un point singulier du type "source", le programme DU en comportant deux.

II.2 - Définition des coefficients tuyère

II.2.1 - Coefficients de débit

Soit $W_{réel}$ le débit de la tuyère et soit W_{mono} le débit monodimensionnel isentropique calculé dans la section géométrique du col au taux de détente appliqué à l'écoulement réel.

Nous appelons coefficient de débit C_D la valeur

$$C_D = \frac{W_{réel}}{W_{mono}}$$

et coefficient de débit maximum C_{Dmax} la valeur de C_D lorsque l'écoulement est bloqué.

II.2.2 - Coefficients de poussée et d'efficacité

Soit g l'indice caractérisant les diverses grandeurs aérodynamiques et géométriques dans le plan de sortie de la tuyère et $*$ le symbole caractérisant l'état critique.

II.2.2.1 - Coefficient de poussée

Nous appelons coefficient de poussée absolue K_{TA} la valeur

$$K_{TA} = \frac{X_{GA}}{\rho_i A_g^*}$$

où ρ_i est la pression génératrice et où

$$X_{GA} = X_G + \rho_g A_g \quad (X_G : \text{poussée brute})$$

ρ_g et A_g étant respectivement la pression et l'aire de la section au col.

En écoulement monodimensionnel isentropique X_{GA} possède une expression analytique simple

$$(X_{GA})_{mono} = A_g (\rho_g + \rho_g V_g^2)$$

$$(X_{GA})_{mono} = \rho_g A_g (1 + \gamma M_g^2)$$

avec γ : rapport des chaleurs spécifiques

d'où $(K_{TA})_{mono} = \bar{\phi}(M, \gamma) = \bar{\omega}(M, \gamma) \Sigma(M, \gamma) (1 + \gamma M^2)$

avec $\bar{\omega}(M, \gamma) = \rho_g / \rho_i$, $\Sigma(M, \gamma) = A_g / A_g^*$.

Deux valeurs du K_{TA} monodimensionnel isentropique sont particulièrement intéressantes :

$$(K_{TA}^*)_{mono} = \bar{\phi}(1, \gamma) = \bar{\omega}(1, \gamma) (\gamma + 1)$$

$$(K_{TA})_{mono} = \bar{\phi}(\bar{M}, \gamma) = \bar{\omega}(\bar{M}, \gamma) \Sigma(\bar{M}, \gamma) (1 + \gamma \bar{M}^2)$$

\bar{M} : nombre de Mach qui assure en écoulement monodimensionnel et dans le plan de sortie le débit de l'écoulement réel ($\bar{M} < 1$).

II.2.2.2 - Coefficients d'efficacité

En régime supercritique bloqué il est commode de définir le coefficient η_{abs}^* tel que

$$\eta_{abs}^* = \frac{K_{TA}}{(K_{TA}^*)_{mono}} = \frac{K_{TA}}{\bar{\phi}(1, \gamma)}$$

Lorsque le régime est subcritique ou supercritique non bloqué nous utilisons

$$\eta_{abs} = \frac{K_{TA}}{(K_{TA})_{mono}} = \frac{K_{TA}}{\bar{\phi}(\bar{M}, \gamma)}$$

Lorsque l'écoulement est bloqué nous avons la relation simple suivante entre η_{abs} et η_{abs}^*

$$\frac{\eta_{abs}}{\eta_{abs}^*} = \frac{\bar{\phi}(1, \gamma)}{\bar{\phi}(\bar{M}, \gamma)}$$

II.3 - But des programmes

On se fixe le demi-angle au sommet du tronc de cône ($-\theta_p$), le taux de détente, le rapport des chaleurs spécifiques γ et, pour les programmes DU et TU , le nombre de Mach à l'infini amont.

On calcule, dans tous les cas, les iso-Mach de l'écoulement, la ligne de jet, les coefficients de débit, de poussée et d'efficacité, et en plus, pour les programmes DU et TU , le rapport de contraction D_c/D (diamètre au col/diamètre à l'infini amont) et la longueur des volets.

Pour les programmes TR et TU , on détermine les grandeurs caractéristiques de la frontière transsonique utilisables pour un calcul d'éjecteur ou pour le calcul d'un jet libre supersonique.

II.4 - Calcul du nombre de Mach à l'infini amont

La méthode hodographique étant une méthode inverse, nous ne pouvons faire entrer comme donnée dans les programmes de type DU et TU le rapport de contraction D_c/D .

Pour éluder ce problème dans le cas du calcul des coefficients de débit, de poussée et d'efficacité nous avons tracé une fois pour toutes des abaques et en particulier

$$C_{Dmax} = C_{Dmax}(\text{angle volets}, D_c/D)$$

$$\frac{C_D}{C_{Dmax}} = \frac{C_D}{C_{Dmax}}(\text{angle volets}, \text{taux de détente})$$

Pour obtenir la frontière transsonique d'un convergent géométriquement déterminé nous nous servons des abaques ci-dessus. Connaissant le taux de détente et le rapport de contraction nous obtenons le C_D et alors le Mach amont. Après exploitation d'un programme de type DU ou TU nous vérifions que le rapport de contraction trouvé est bien celui prévu initialement.

II.5 - Considérations générales relatives aux différents programmes

II.5.1 - Justification de l'étude des programmes des types DR et TR

Les tuyères à écoulement infini amont radial ne présentent pas d'intérêt pour le motoriste. Toutefois leur étude constitue une étape intermédiaire particulièrement importante. L'étude d'un programme du type DR permet au départ de traiter un problème dans lequel l'hodographe est particulièrement simple et où n'intervient qu'une singularité. Il est ainsi possible de concentrer toute son attention sur le processus de résolution.

L'étude d'un programme du type TR permet de traiter un problème transsonique complet sans faire appel à l'étude des points singuliers. Enfin, dans ces deux cas, les comportements des fonctions ψ, χ, F s'expriment analytiquement à l'infini amont. Ceci est particulièrement intéressant pour effectuer des recoupements au cours de la mise au point des programmes.

II.5.2 - Systèmes d'axes utilisés dans le plan de l'hodographe

Nous utilisons essentiellement deux types d'axes de coordonnées :

- Un système (V, θ) pour le domaine subsonique,
- Un système (W, θ) pour le domaine supersonique,

Une tuyère fonctionnant uniquement en régime subcritique aura un hodographe défini seulement dans un système (V, θ) .

Il faudra les deux systèmes d'axes pour définir l'hodographe d'un écoulement supercritique.

II.6 - Etude des différents programmes

II.6.1 - Programme du type DR

II.6.1.1 - Maillage dans le plan de l'hodographe

Dans le système d'axes (V, θ) l'hodographe est défini par un rectangle ayant pour côtés la vitesse V_j du fluide à la lèvre de la tuyère et l'angle θ_p de la paroi (fig. II.1).

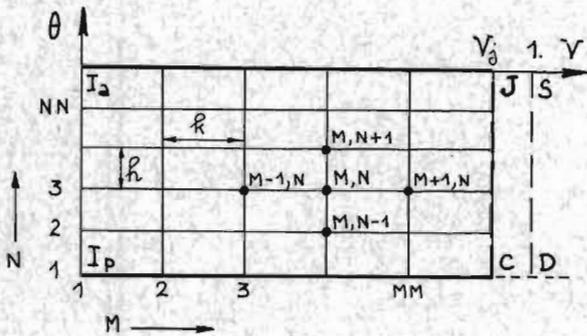


Figure II.1

Nous divisons V_j en MM parties égales, θ_p en NN parties égales et posons

$$\begin{aligned} R &= V_j / MM, & R_p &= \theta_p / NN \\ M_1 &= MM + 1, & NMAX &= NN + 1 \end{aligned}$$

II.6.1.2 - Discretisation de l'équation de Steichen

Soit M et N deux indices pouvant prendre respectivement toutes les valeurs comprises entre 1 et M_1 et 1 et $NMAX$.

L'application à l'équation (I.23) d'une méthode de différences finies donne l'expression suivante (fig. II.1)

$$\begin{aligned} \chi_{M,N} &= A(M)(\chi_{M,N-1} + \chi_{M,N+1}) + B(M)\chi_{M+1,N} \\ &+ C(M)\chi_{M-1,N} + D(M,N) \\ &+ E(M,N)(F_{M,N+1} - F_{M,N-1}) \end{aligned} \quad (II.1)$$

Le terme $D(M,N)$ correspond au traitement de la singularité [cf. (I.24)]. Le terme $E(M,N)(F_{M,N+1} - F_{M,N-1})$ est dû au fait que l'écoulement est de révolution.

II.6.1.3 - Conditions aux limites dans le plan de l'hodographe

Sur l'axe $I_a J$ nous posons $\psi = 0$.

Sur la paroi $I_p C$ et sur la ligne de jet $C J$ nous posons $\psi = 1$.

A l'infini amont le comportement de l'écoulement est du type source. Compte tenu des valeurs de ψ prises sur l'axe et sur la paroi nous obtenons

$$\psi = \frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \theta_p}$$

En faisant intervenir la fonction ψ_j caractéristique de la singularité nous obtenons grâce à la relation (I.22) les conditions aux limites suivantes pour l'équation (I.23)

$$\chi = -\psi_j \quad \text{sur l'axe}$$

$$\chi = 1 - \psi_j \quad \text{sur la paroi et la ligne de jet}$$

$$\chi = \frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \theta_p} \psi_j \quad \text{à l'infini amont}$$

La relation (I.18) traduit que sur $I_a J$ $\psi_j = 0$ et sur $C J$, $\psi_j = 1$ d'où, le long de ces deux segments,

$$\chi = 0.$$

II.6.1.4 - Prédicteur dans le plan de l'hodographe

Sur une forte proportion du contour hodographique la fonction χ est nulle. De ce fait nous avons initialisé à zéro toutes les valeurs de $\chi(M,N)$ à l'intérieur de l'hodographe.

II.6.1.5 - Processus itératif de résolution dans le plan de l'hodographe

Pour une valeur $F_{M,N}$ définie en chaque noeud du maillage nous procédons, du fait du caractère elliptique de l'équation (I.23), à une résolution itérative par la méthode de Gauss-Seidel. Nous calculons par le schéma à cinq points les valeurs de la fonction χ compte tenu des valeurs à la frontière.

Nous parcourons les mailles dans le sens des vitesses croissantes en commençant le processus le long de la paroi $\theta = \theta_p$.

Pour effectuer la résolution complète du problème de révolution tel que cela a été présenté aux paragraphes I.2 et I.22 il faut, après chaque résolution, calculer, en tout point du maillage,

$$y = \chi - \psi_j \quad (II.2)$$

par la relation (I.25).

Ceci se fait par combinaison d'intégrations paraboliques centrées ou excentrées dont la formule de Simpson est la relation de base.

Remarque

Dans F nous calculons $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial V}$ par les relations

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \frac{1}{B_j} \frac{\xi_j}{R_j^2} \frac{\partial \psi_j}{\partial \omega_j}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial V} = \frac{\partial \chi}{\partial V} - \frac{1}{V_j} \frac{\eta_j}{R_j^2} \frac{\partial \psi_j}{\partial \omega_j}$$

(II.3)

où $B_j = \sqrt{1 - M_j^2}$.

II.6.1.6 - Retour au plan physique

La résolution terminée, le retour au plan physique est déjà fait pour y et par conséquent pour r grâce aux relations (II.2), (I.15) et (I.6).

Pour obtenir x il faut intégrer la première des relations (I.11) sur les isovitesse. La présence de r dans cette équation nous oblige à commencer l'intégration à partir de la paroi où la valeur initiale peut être préalablement calculée en intégrant la deuxième équation (I.11) sur $\theta = \theta_p$, à partir de C pris comme origine des x .

II.6.1.7 - Calculs de C_D, K_{TA}, η_{abs}

Nous évaluons le débit $W_{réel}$ et la poussée X_{GA} sur une surface iso-kach voisine du plan de sortie de la tuyère par les relations suivantes

$$W_{réel} = 2\pi \int r \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds$$

$$X_{GA} = \int 2\pi \int r [\rho \vec{n} + (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{v}] ds$$

\vec{n} vecteur unitaire normal à la surface iso-kach
 \vec{j} vecteur unitaire parallèle à l'axe de révolution
 ds élément de longueur de la surface iso-kach contenu dans un plan méridien

A partir de $W_{réel}$ et X_{GA} nous calculons C_D et K_{TA}
 Nous obtenons \bar{M} par la relation

$$\Sigma(\bar{M}, r) = \Sigma(M_j, r) / C_D$$

d'où η_{abs}

II.6.2 - Programme du type TR

II.6.2.1 - Maillage dans le plan de l'hodographe

II.6.2.1.1 - Domaine subsonique

Nous avons le même hodographe et le même maillage que pour le problème précédent. Toutefois le segment CJ représentatif de la ligne de jet est repoussé à l'extrémité de la détente de Prandtl-Meyer et se retrouve dans le domaine supersonique.

De ce fait, dans le domaine subsonique, selon l'axe des V , l'hodographe a une dimension constante et égale à 1. Nous posons alors $R = 1/MM$

Par contre nous avons toujours $R = -\theta_p/NN$

et le segment DS représente la ligne sonique.

II.6.2.1.2 - Domaine supersonique

Dans l'étude des problèmes plans nous avons utilisé pour définir le maillage de la zone supersonique les caractéristiques d'équations

$$\theta = \lambda - W \quad (\text{caractéristiques descendantes})$$

$$\theta = \mu + W \quad (\text{caractéristiques montantes})$$

[voir références (1) et (2)]

La détente de Prandtl-Meyer au bord de lèvre de la tuyère étant identique en écoulement plan et en écoulement de révolution nous adoptons ici le maillage du problème plan.

L'axe des θ est divisé en NN parties égales comme dans le domaine subsonique. De chacun des points ainsi définis nous menons une parallèle et une perpendiculaire à la droite d'équation $\theta = W + \theta_p$ représentant la détente de Prandtl-Meyer (fig. II.2).

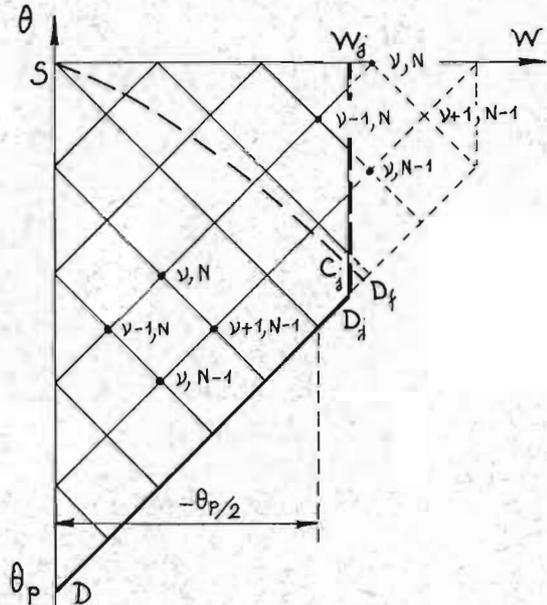


Figure II.2

Nous repérons chaque parallèle à cette détente par l'indice N dont la valeur est comprise entre 1 et $NMAX$.

Nous repérons les points du maillage placés sur une iso- W par l'indice ν dont la valeur est comprise entre 1 et $\nu\nu$ et nous posons $\nu\nu MAX = \nu\nu + 1$. Lorsque l'on débouche dans une enceinte isobare la ligne de jet est une iso- W . Elle est comprise, dans le cas général, entre les indices $\nu\nu$ et $\nu\nu MAX$ (fig. II.2).

II.6.2.2 - Discrétisation des équations dans le plan de l'hodographe

II.6.2.2.1 - Domaine subsonique

Nous obtenons une relation du même type qu'au paragraphe II.6.1.2. Toutefois comme il n'y a pas de point singulier dans ce problème, l'équation discrétisée est en ψ et le terme $D(M, N)$ est nul d'où

$$\psi_{M,N} = A(M) (\psi_{M,N-1} + \psi_{M,N+1}) + B(M) \psi_{M+1,N} + C(M) \psi_{M-1,N} + E(M,N) (F_{M,N+1} - F_{M,N-1})$$

(II.4)

II.6.2.2.2 - Domaine supersonique

La discrétisation de l'équation (I.33) nous conduit, dans le cas général, à l'expression suivante, caractéristique d'un schéma explicite à quatre points:

$$\psi_{v,N} = \psi_{v-1,N} + \psi_{v+1,N-1} - \psi_{v,N-1} + G(v) (\psi_{v+1,N-1} - \psi_{v-1,N}) + H(v,N) (\tilde{F}_{v,N} - \tilde{F}_{v,N-1}) \quad (\text{II.5})$$

Près de la ligne de jet l'expression se complique un peu si les mailles sont incomplètes mais conserve ses propriétés de schéma explicite (fig. II.3).

II.6.2.3 - Conditions aux limites dans le plan de l'hodographe

II.6.2.3.1 - Domaine subsonique

Elles sont identiques à celles du problème subsonique précédent mais s'expriment directement à l'aide de la fonction ψ .

II.6.2.3.2 - Domaine supersonique

Le long du segment DD_j représentatif de la détente de Prandtl-Meyer nous posons $\psi = 1$ ainsi que le long de la ligne de jet $D_j B_j$ (fig. I.9).

II.6.2.4 - Prédicteur dans le plan de l'hodographe

II.6.2.4.1 - Domaine subsonique

Le prédicteur tient compte de la donnée sur $V=0$ et d'un comportement de ψ , sur DS , voisin de celui retenu en (2), en écoulement plan.

II.6.2.4.2 - Domaine supersonique

Nous avons initialisé à zéro toutes les valeurs de $\psi_{v,N}$ comprises dans le trapèze défini par la ligne sonique, la détente de Prandtl-Meyer, la ligne de jet et l'axe des W .

II.6.2.5 - Processus itératif de résolution dans le plan de l'hodographe

II.6.2.5.1 - Domaine subsonique

Le processus de résolution est identique à celui décrit dans le paragraphe II.6.1.5. On utilise le schéma à 5 points et les valeurs de ψ sont obtenues par la relation (II.4). La différence avec le problème subcritique est que ψ n'est connu a priori que sur trois côtés du domaine rectangulaire subsonique. Les valeurs de ψ sur $V=1$ qui interviennent quand on applique le schéma à 5 points sur la dernière isovitesse subsonique ($V=1-R$) sont des valeurs évolutives qui sont reconsidérées à chaque itération et calculées par le schéma transsonique.

II.6.2.5.2 - Domaine transsonique

Sur la ligne $V=1$ on applique le schéma à 3 points traduisant (I.35) et fournissant ψ par

$$\psi_{1,N} = P \psi_{3,N-1} + Q \psi_{MM,N} + R(M,N) (F_{M1,N+1} - F_{M1,N-1}) \quad (\text{II.6})$$

expression dans laquelle interviennent la dernière valeur subsonique de ψ et la première valeur supersonique toujours connue au moment de l'application de ce schéma.

Le schéma à 3 points établit le couplage entre le domaine subsonique et le domaine supersonique.

II.6.2.5.3 - Domaine supersonique

Quand \tilde{F} est déterminée en chaque noeud du maillage, on obtient explicitement, par (II.5), une valeur de ψ en chaque point du domaine supersonique

à l'aide des trois autres valeurs de la maille, ces valeurs étant ou bien fixées à la frontière sur DD_j et $D_j B_j$ ou bien préalablement calculées soit sur $V=1$ soit en supersonique.

Il est indispensable de procéder dans le sens des V croissants et, à partir de la détente, dans le sens des θ croissants soit à v et N croissants (fig. II.2).

Lorsque l'on a ainsi balayé tout le domaine on recommence autant de fois qu'il est nécessaire jusqu'au moment où les valeurs de ψ sont stationnaires en subsonique.

Après chaque résolution nous devons, pour chacun des domaines couplés, calculer $\mathcal{Y}_{M,N}$, $\mathcal{Y}_{M1,N}$ et $\mathcal{Y}_{v,N}$ par (I.16). Dans cette relation nous faisons $V=1$ pour obtenir $\mathcal{Y}_{M1,N}$ et nous remplaçons $V \frac{\partial \psi}{\partial V}$ par $B \frac{\partial \psi}{\partial W}$ pour obtenir $\psi_{v,N}$.

Remarque -

Pour obtenir un résultat réellement satisfaisant il faut d'abord intégrer par parties l'équation (I.16) avant de la traiter numériquement. L'expression retenue, à savoir

$$\mathcal{Y} = \psi \cos \theta + \int (V \frac{\partial \psi}{\partial V} + \psi) \sin \theta d\theta$$

évite d'avoir à faire numériquement une dérivée par rapport à θ , forcément imprécise au voisinage de l'axe où ψ est petit.

II.6.2.6 - Retour au plan physique

II.6.2.6.1 - Domaine subsonique

Le retour au plan physique se fait, pour l'abscisse x , comme dans le problème purement subsonique grâce aux équations (I.11).

II.6.2.6.2 - Domaine supersonique

Nous obtenons x en intégrant la première relation (I.11). La constante d'intégration est bien définie. En effet, les iso-Mach le long desquelles nous intégrons cette relation dans le plan de l'hodographe commencent toutes sur la détente de Prandtl-Meyer DD_j qui correspond dans le plan physique à la lèvres de la tuyère que l'on prend comme origine.

II.6.2.7 - Calculs de C_D , K_{TA} , η_{abs}^* , η_{abs}

Nous évaluons le débit $W_{réel}$ et la poussée X_{GA} sur la surface sonique par les relations du paragraphe II.6.1.7.

A partir de $W_{réel}$ et X_{GA} nous calculons C_{Dmax} , K_{TA} et η_{abs}^* lorsque l'écoulement est bloqué.

Si l'écoulement n'est pas bloqué, nous calculons C_D et K_{TA} . Nous obtenons \bar{M} par la relation

$$\Xi(\bar{M}, \gamma) = 1/C_D$$

d'où η_{abs} .

II.6.2.8 - Détermination de la frontière transsonique

II.6.2.8.1 - Traitement dans le plan de l'hodographe

En écoulement plan la caractéristique $\lambda = 0$ est, dans le plan W, θ , une droite d'équation $\theta = -W$.

En écoulement de révolution cette équation devient

$$\theta = -W + \int \delta \theta_\lambda \quad (\text{II.7})$$

dans laquelle

$$\delta\theta_\lambda = \frac{tg\theta}{B\,tg\theta - 1} \frac{dr}{r}$$

A chaque point du maillage situé sur la droite d'équation $\theta = -W$ nous pouvons associer une valeur de r et calculer ainsi $\delta\theta_\lambda$. Nous obtenons dans le plan de l'hodographe la courbe SC_j (fig. II.2).

II.6.2.6.2 - Retour au plan physique

A chaque noeud du maillage du plan de l'hodographe nous pouvons associer une valeur de α et de r et, par interpolation ou extrapolation dans le plan de l'hodographe, nous pouvons définir la frontière transsonique dans le plan physique.

II.6.3 - Programme de type DU

Ce programme se différencie essentiellement du programme DR par le comportement de l'écoulement à l'infini amont et par l'existence d'un point d'arrêt A.

Ceci se traduit au niveau du plan de l'hodographe par une modification des conditions aux limites et au niveau de la formulation par le fait qu'il y a cette fois deux points singuliers.

Une fois ces deux points singuliers traités selon les indications des paragraphes I.21 et I.23 nous retrouvons un processus de résolution identique à celui présenté pour le programme DR.

II.6.4 - Programme de type TU

Nous avons ici un régime supercritique avec un point singulier en subsonique. La formulation et les conditions aux limites s'inspirent donc à la fois des programmes de type DU et TR.

Dans le domaine subsonique la formulation est identique à celle du programme DU mais avec disparition de la singularité relative au point J, la ligne de jet étant située maintenant dans le domaine supersonique.

Dans le domaine supersonique nous avons très exactement la formulation du programme de type TR.

II.7 - Traitement spécial de la première maille supersonique

Dans le cas des programmes TR et TU, pour lesquels on utilise, en supersonique, les variables W, θ on a introduit un changement de variable tel que $\partial\psi/\partial W$ soit infini sur la ligne sonique. Sur la première ligne supersonique ($\nu=2, W=\bar{R}/2$) où l'équation (I.33) est discrétisée, $\partial\psi/\partial W$, sans être infini, est déjà grand, d'autant plus grand que \bar{R} est petit. Le schéma à 4 points souffre localement d'imprécision. La précision peut être notablement améliorée si, dans la première maille supersonique, la discrétisation s'effectue en variables V, θ pour les points homologues de ceux de $\nu=2$, dans un maillage formé par les courbes $\lambda = \theta + W(V)$ et $\mu = \theta - W(V)$ (fig. II.3).

Pour cela nous appliquons le schéma numérique de calcul de l'équation (I.35) aux points

$$(MM, N), (1, N), (2, N - \frac{1}{2})$$

puis aux points

$$(MM, N), (1, N), (3, N - 1).$$

L'élimination du point (MM, N) entre ces deux relations nous permet d'explicitier $\psi(2, N - \frac{1}{2})$ en fonction de $\psi(1, N)$ et $\psi(3, N - 1)$.

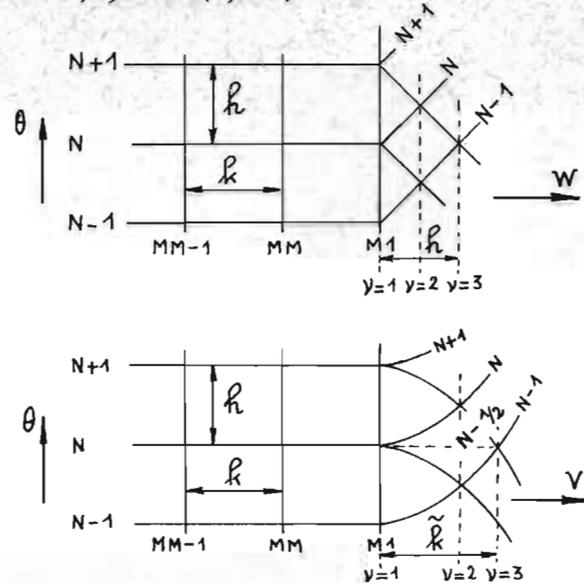


Figure II.3

Nous appliquons ensuite le schéma numérique de calcul de l'équation (I.23) aux 5 points suivants :

$$(1, N), (2, N), (2, N - \frac{1}{2}), (3, N - 1), (2, N - \frac{1}{2})$$

L'élimination du point $(2, N - \frac{1}{2})$ entre cette relation et la précédente nous donne le schéma numérique à quatre points suivant :

$$\psi_{2,N} = -\psi_{2,N-1} + S\psi_{3,N-1} + T\psi_{1,N} + U_1(F_{M1,N+1} - F_{M1,N-1}) + U_W(\tilde{F}_{2,N} - \tilde{F}_{2,N-1}) \quad (II.8)$$

Le résultat le plus spectaculaire de l'application de cette formule se fait sentir au niveau du calcul des valeurs de η_{abs}^* (fig. III.17).

Au lieu de la courbe obtenue initialement et présentée en pointillé nous avons maintenant des valeurs beaucoup plus cohérentes avec les résultats expérimentaux.

III - Etude expérimentale - Comparaison théorie-expérience

Une étude expérimentale systématique des éjecteurs convergents tronconiques de révolution a été entreprise parallèlement aux travaux théoriques précédents.

L'objectif fixé à l'origine était d'obtenir un catalogue de données de départ en vue du calcul par la méthode des caractéristiques de l'écoulement supersonique issu de ce type de convergents.

Si l'emploi de la méthode de calcul exposée ci-dessus se substitue désormais à l'utilisation du catalogue établi (3), les résultats de l'étude expérimentale permettent en revanche de valider les calculs théoriques.

Après un rappel de la technique de mesure, ainsi que de la procédure d'exploitation des données expérimentales, la cohérence des résultats sera brièvement examinée.

Quelques exemples typiques serviront ensuite à établir la confrontation théorie-expérience.

III.1 - Méthode et moyens d'essais

III.1.1 - Dispositif expérimental

L'étude expérimentale couvre une large gamme d'angles d'ouverture θ_p des convergents ($-\theta_p = 2^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 45^\circ, 80^\circ, 90^\circ$).

Ces tuyères de petites dimensions (diamètre de sortie ≈ 13 mm) sont placées dans un caisson où le jet se détend jusqu'à un niveau de pression p_c (température T_c), contrôlé, soit par l'ajustement de la forme et de la position de la reprise, soit à l'aide d'un dispositif auxiliaire d'aspiration ou de soufflage.

Afin de limiter le nombre des paramètres, le régime de fonctionnement des éjecteurs a presque toujours été maintenu supercritique, bloqué.

La technique de mesure est essentiellement l'interférométrie qui présente l'avantage de fournir une analyse détaillée du phénomène sans le perturber.

La veine d'expérience est située sur l'un des trajets d'un interféromètre de Mach-Zehnder (fig. III.1).

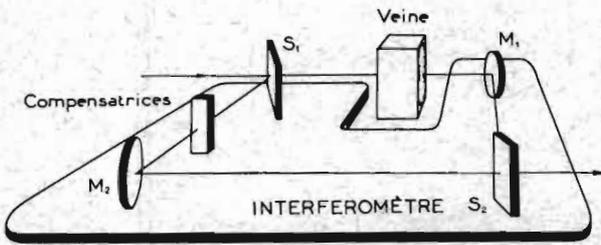


Figure III.1

Le fonctionnement en caisson permet d'effectuer les essais avec des conditions génératrices sensiblement identiques ($p_i = 6$ bars, $T_i = 300^\circ\text{K}$) pour les taux de détente très différents nécessités par la recherche du régime bloqué dans toute l'étendue de la gamme des angles d'ouverture. La pression p_i est assez forte pour rendre la méthode suffisamment sensible sans que se manifestent des effets de viriel⁽⁴⁾.

III.1.2 - Procédure expérimentale

L'exploitation des interférogrammes suit la procédure générale qui a été mise au point pour les écoulements de révolution⁽⁵⁾. Celle-ci comporte les opérations suivantes :

- 1°) prise de vue de l'interférogramme ;
- 2°) lecture densitométrique du cliché le long de lignes L normales à l'axe de révolution (fig. III.2).

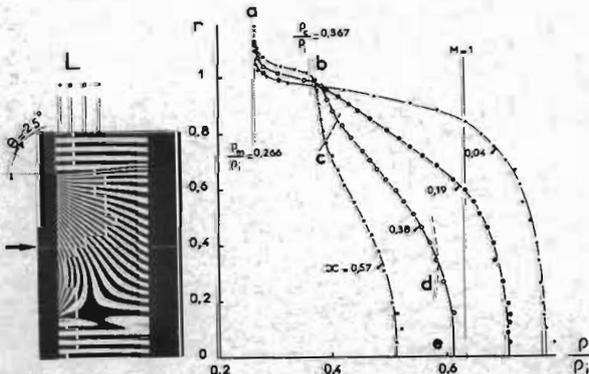


Figure III.2

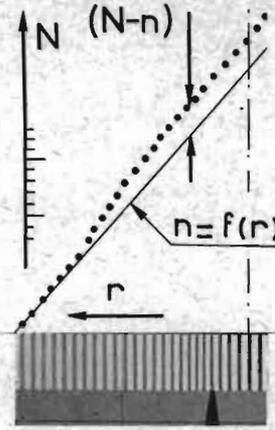


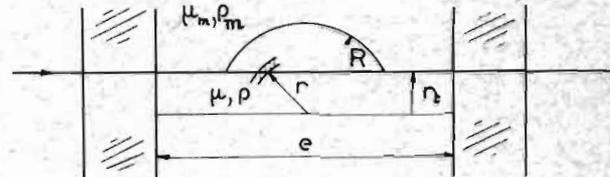
Figure III.3

Le réglage de l'interféromètre dit "en franges serrées" fournit, comme l'explique la figure III.3, une définition précise de phénomènes même peu évolutifs, grâce à un accroissement du nombre des pointés.

Les cotes des franges sont repérées de façon semi-automatique.

3°) Un programme de calcul transpose alors directement la liste des cotes en valeurs de la masse spécifique ρ le long des lignes d'exploration.

Une première opération consiste à dériver la courbe de chemin optique $S = S(u)$ qui correspond à la traversée de la veine (fig. III.4). Le schéma du calcul de $S(u)$ à partir des cotes des franges est rappelé figure III.5



$$K = \frac{\lambda}{B\rho_i}$$

λ : longueur d'onde

$$v = \frac{\rho - \rho_m}{\rho_i}$$

$$u = r^2$$

$$U = R^2$$

$$S = \int_0^e (\mu - \mu_m) de \quad (\text{III.1})$$

$$\frac{\mu - 1}{\rho} = B \quad (\text{III.2})$$

(Loi de Gladstone)

μ : indice de réfraction

$$S_t = \frac{1}{K} \int_{u_t}^U \frac{v(u) du}{\sqrt{u - u_t}} \quad (\text{III.3})$$

$$v_t = -\frac{K}{\pi} \int_{u_t}^U \frac{S'(u) du}{\sqrt{u - u_t}} \quad (\text{III.4})$$

Figure III.4

N° de frange

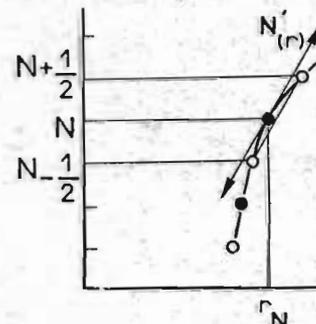


Figure III.5

$$S'(u) = \frac{1}{2r} \frac{dS}{dr}$$

$$S = N - n$$

$$\frac{dS}{dr} = \frac{dN}{dr} - \frac{dn}{dr}$$

$$\frac{dn}{dr} = C r e$$

$$\frac{dN}{dr} = \frac{-1}{r_{N+\frac{1}{2}} - r_{N-\frac{1}{2}}}$$

L'opération suivante est alors le calcul de ρ par la relation intégrale (III.4) qui correspond à l'inversion de l'intégrale d'Abel (III.3), la courbe est dans ce cas approchée par des polynômes (fig. III.6).

$$v_k = -\frac{K}{\pi} \left[\int_{u_t}^{u_{j+1}} \frac{f_j(u) du}{\sqrt{u-u_t}} + \sum_{k=j+1}^n \int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{f_k(u) du}{\sqrt{u-u_t}} \right] \quad (\text{III.5})$$

$$v_k = -\frac{2K}{\pi} \sum_{k=i+1}^{n+1} \sum_{m=0}^p \left[\frac{(-1)^{m+1} 2^m}{3.5 \dots (2m+1)} \sigma_k^{(m)}(u_k)(u_k-u_t)^{\frac{2m+1}{2}} \right] \quad (\text{III.6})$$

$$\sigma_k^{(m)}(u_k) = f_k^{(m)}(u_k) - f_{k-1}^{(m)}(u_k) \quad \left(f^{(m)} = \frac{d^m f}{d u^m} \right) \quad (\text{III.7})$$

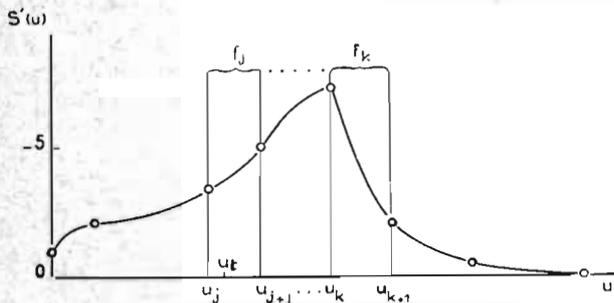


Figure III.6

4°) On obtient ainsi, à partir des conditions initiales ρ_m définies à l'extérieur du jet, dans une région sensiblement homogène, l'évolution de ρ sur chaque ligne d'exploration, comme le montre la figure III.2.

ρ_m est calculé d'après les mesures, effectuées dans l'eau-morte, de la pression et de la température:

$$\frac{\rho_m}{\rho_i} = \frac{p_c}{p_i} \frac{T_i}{T_c}$$

Sur chacune de ces lignes ($\alpha = C^{\pm}$), la masse spécifique présente, à partir du point de référence situé dans l'eau-morte, une évolution à caractère systématique qui permet de distinguer successivement :

- la zone *ab* marquée par une croissance rapide de ρ depuis la valeur ρ_m jusqu'à une valeur voisine de $\rho_c = \rho_i (p_c/p_i)^{1/2}$, à la frontière de l'écoulement isentropique : cette zone représente la couche de mélange à la frontière du jet ;
- une région *bc* à faible gradient de masse spécifique $\partial \rho / \partial r$ (≥ 0 ou nul, selon le cas), qui correspond au domaine compris entre la dernière caractéristique du faisceau de détente et la zone de mélange ;
- la zone *cd*, influencée par la détente issue du point anguleux, dans laquelle on enregistre une augmentation de la masse spécifique d'autant plus rapide que les sections considérées sont plus proches du plan de sortie de la tuyère et que le faisceau de détente est plus étroit ;
- le voisinage ρ de l'axe, où l'état des vitesses, et par suite celui de la masse spécifique, est transversalement uniforme.

III.2 - Exploitation des données expérimentales

L'exploitation des mesures de ρ a permis d'obtenir :

- la détermination des directions locales θ des vitesses,
- une description précise de l'écoulement au voisinage immédiat du point anguleux situé dans la partie inaccessible aux mesures directes du fait de la diffraction à proximité de la surface de sortie de la tuyère. Cette analyse a donc été faite par voie numérique à partir des données expérimentales connues en aval du point anguleux.

Pour résoudre ces deux problèmes, il a été fait usage de la méthode des caractéristiques, associée à diverses hypothèses concernant les conditions aux limites des domaines de calcul envisagés.

III.2.1 - Calcul de la direction de la vitesse

L'angle θ de la vitesse avec l'axe est calculé d'un point Q_1 au suivant Q_2 situé sur un même arc de caractéristique (C) à partir du nombre de Mach connu en tout point du champ et de la relation caractéristique (III.8) entre les points Q_1 et Q_2 (fig. III.7).

$$\theta_2 = \theta_1 + \varepsilon (P_2 - P_1) + i \left(\frac{\sin \alpha_1 \sin \theta_1}{r_1} + \frac{\sin \alpha_2 \sin \theta_2}{r_2} \right) \frac{|AB|}{2 \cos \bar{\alpha}} \quad (\text{III.8})$$

($P^* = 1000 - W$: nombre de Busemann)

$$\text{avec } \bar{\alpha} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \varepsilon (\theta_1 + \theta_2)}{2}$$

Les points de départ du calcul sont situés sur l'axe $\theta = 0$. Le calcul est poursuivi :

- soit entre deux lignes L et L' ($\alpha = C^{\pm}$) (calcul a_1) ; il comporte dans ce cas le changement des familles de caractéristiques en chaque point Q des lignes L et L' ;
- soit le long d'une même caractéristique qui coupe alors plusieurs lignes L (calcul a_2).

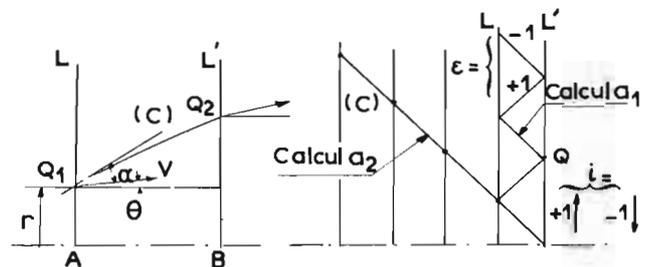


Figure III.7

La figure III.8 représente un exemple d'application relatif à la tuyère $\theta_p = -25^\circ$. L'angle θ a d'abord été calculé selon a_1 , entre les lignes $\alpha = 0.476$ et $\alpha = 0.524$ d'une part, puis entre les lignes $\alpha = 0.524$ et $\alpha = 0.573$ d'autre part. Les valeurs ainsi déterminées sur la ligne commune $\alpha = 0.524$ se recoupent bien et servent à amorcer les calculs du type a_2 le long des caractéristiques qui rencontrent L ($\alpha = 0.524$).

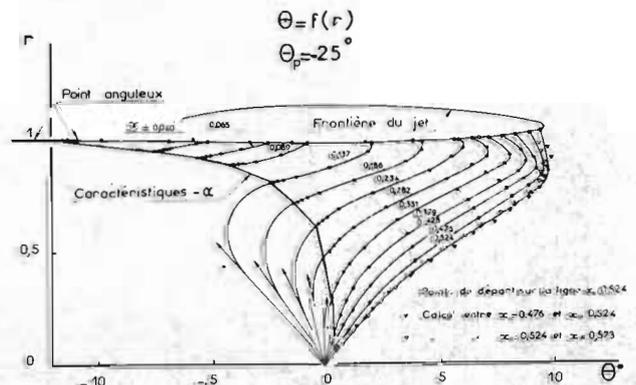


Figure III.8

La tangente à l'origine des courbes $\theta(r)$ pour $\alpha = C_{te}$ s'exprime à partir de la masse spécifique par la relation

$$\left(\frac{\theta}{r}\right)_{r=0} = -\frac{M^2-1}{2M^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (III.9)$$

L'expérience permet donc de définir la valeur $(\partial\theta/\partial r)_{r=0}$ et par conséquent de préciser l'allure des courbes $\theta(r)$ dans le domaine subsonique qui échappe au calcul par la méthode des caractéristiques.

Sur cette figure est également reportée la courbe de l'évolution de $\theta(r)$ à la frontière théorique du jet dont le calcul est exposé au paragraphe suivant. Cette frontière correspond à la ligne de courant issue du point anguleux lors de la détente isentropique du jet jusqu'au niveau de pression p_e .

III.2.2 - Calcul de l'écoulement au voisinage du point anguleux

L'écoulement supposé isentropique et isobare à sa frontière est calculé à contre courant par la méthode des caractéristiques (calcul b), depuis une ligne (L) sur laquelle M et θ ont été déterminés à partir des interférogrammes (fig. III.9).

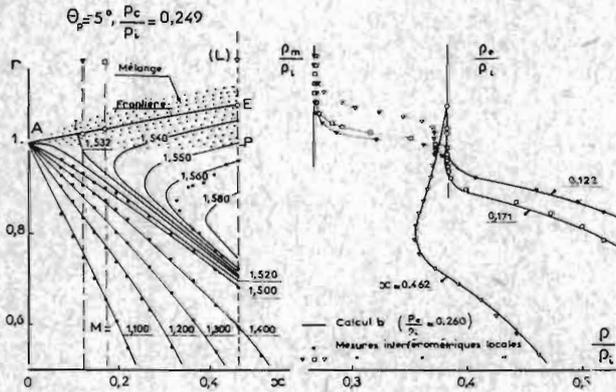


Figure III.9

La mise en oeuvre d'un tel calcul suppose néanmoins effectuée l'opération préliminaire qui consiste à prolonger jusqu'à la ligne de jet théorique en E, de cote r_e , l'écoulement isentropique interrompu en P par la couche de mélange.

La définition de $\rho(r)$ dans ce domaine est effectuée par une extrapolation des valeurs expérimentales obtenues pour $r \leq r_p$, soumise aux opérations de contrôle suivantes :

- d'une part, l'ajustement de p_e permet d'assurer la cohérence du calcul avec les mesures locales effectuées par l'interférométrie pour $x \leq x_1$,
- d'autre part, la définition précise de r_e est obtenue par la condition de passage en A de la ligne de courant issue de E.

A doit d'ailleurs coïncider avec le point de concours des caractéristiques de la détente.

Comme le montre la figure III.10 représentative du plan de l'hodographe P, θ (avec P nombre de Busemann : $P = 1000 - W$), ce calcul permet effectivement de reconstituer l'écoulement jusqu'au point anguleux dans une région où la vitesse évolue très rapidement, ainsi que le révèle la graduation en r de l'une des caractéristiques $C_{-\alpha}$ du champ.

PLAN DE L'HODOGRAPHE $\theta_p = -20^\circ$

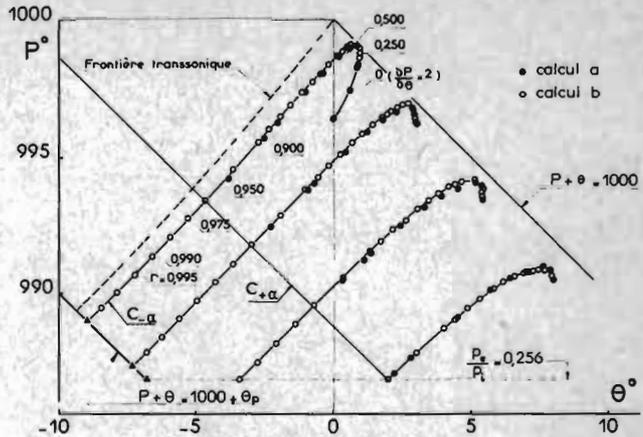


Figure III.10

Le calcul de la détente en A poursuivi à rebours, à partir d'une distribution de données très resserrée sur une caractéristique $C_{-\alpha}$ (calcul c) permet de définir la ligne sonique avec une bonne approximation jusqu'au voisinage immédiat de A (fig. III.11a).

LIGNES SONIQUES

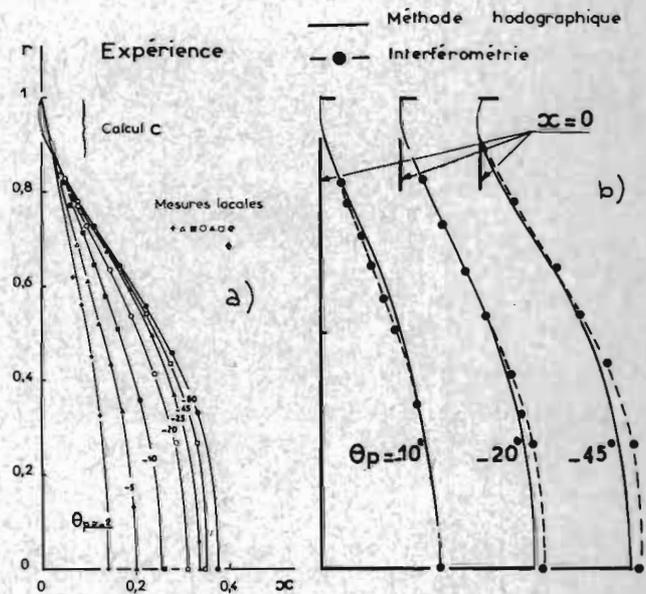


Figure III.11

III.3 - Discussion des résultats expérimentaux

III.3.1 - Développement du mélange à la frontière du jet

Le remplacement de la zone de mélange par une frontière isentropique conduit à des résultats parfaitement cohérents et en accord avec l'expérience pour le calcul de l'écoulement potentiel, à condition de choisir une pression effective de détente p_e qui peut être légèrement différente de la pression de caisson p_c mesurée à l'extérieur. Cet écart s'explique par les mouvements de l'eau-morte que produisent les écoulements induits par voie de mélange (3).

III.3.2 - Détermination de la frontière du jet

La comparaison avec l'expérience du tracé des frontières du jet calculées à partir des données expérimentales constitue un contrôle indirect de l'exactitude de celles-ci.

Malgré l'incertitude causée par le développement du mélange, les photographies de la figure III.12 font apparaître un accord satisfaisant entre la frontière isentropique calculée et la frontière visible.

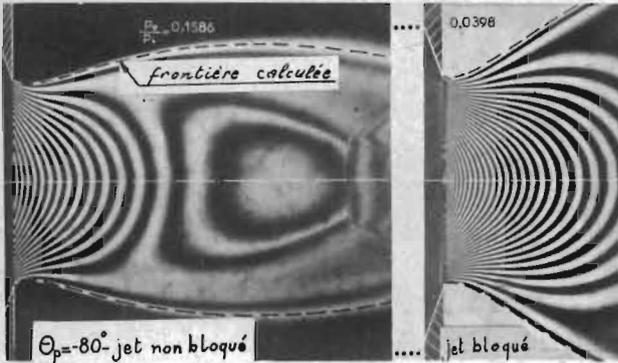


Figure III.12

Un élément de contrôle plus précis, bien que dépendant plus indirectement des données initiales que le tracé des frontières, est constitué par la mise en place des chocs⁽⁶⁾ (disque de Mach en particulier) qui prennent naissance au sein de l'écoulement. La figure III.13 apporte de ce point de vue une excellente confirmation.

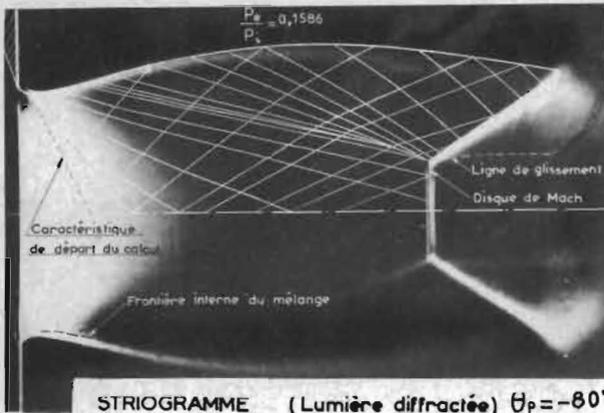


Figure III.13

III.3.3 - Coefficient de débit

L'analyse détaillée du champ des vitesses dans la région du col fournit par intégration du flux de masse local une mesure du coefficient de débit :

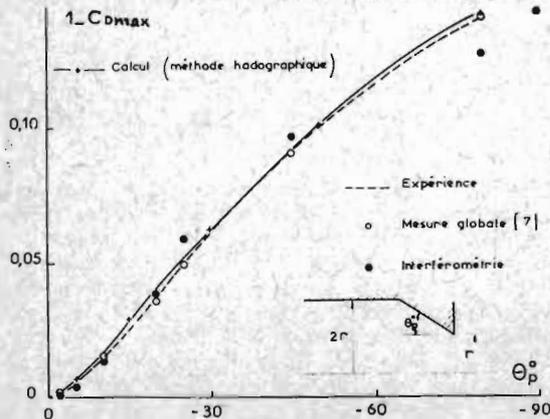


Figure III.14

Cette façon de procéder, moins précise que la mesure globale⁽⁷⁾ fournit néanmoins des résultats voisins (fig. III.14) qui confirment la validité des mesures interférométriques. De plus, l'analyse locale de l'écoulement met en évidence (fig. III.15) le rôle du voisinage immédiat du point anguleux dans la perte du coefficient de débit, d'autant plus grande que l'ouverture du convergent augmente.

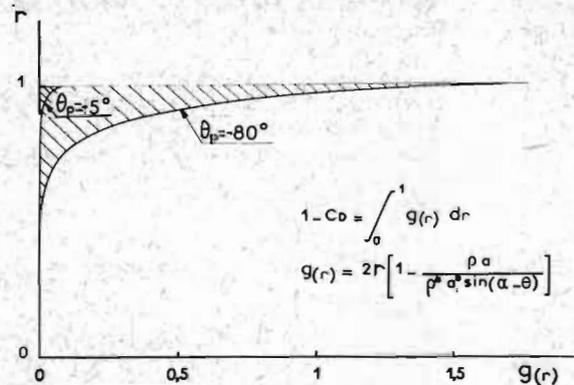


Figure III.15

III.4 - Comparaison calcul-expérience

Après les contrôles du paragraphe précédent, propres à la méthode expérimentale, la confrontation théorie-expérience sera effectuée sur un nombre limité de résultats typiques.

III.4.1 - Lignes soniques

La figure III.11.b révèle un accord assez satisfaisant malgré un écart systématique au voisinage de l'axe. Cet écart, qui augmente si le maillage du calcul est plus lâche, semble lié essentiellement à la discrétisation du phénomène.

III.4.2 - Frontières transsoniques

Le même écart se rencontre au point sonique axial des frontières transsoniques.

Les résultats concordent bien par contre au voisinage de l'arête où le taux de détente $(P_i/P_e)_T$ à l'extrémité de la frontière transsonique définit la condition de blocage.

Le tableau ci-dessous établit cette comparaison pour différents convergents cylindroconiques (diamètre des sections d'entrée et de sortie dans un rapport égal à 2).

Tableau des valeurs de $(P_i/P_e)_T$

θ_p	- 10°	- 20°	- 30°	- 45°
Calcul	2,67	3,48	4,52	6,82
Expérience	2,65	3,45	4,50	6,73

III.4.3 - Coefficient de débit

Le coefficient de débit calculé confirme très exactement les mesures globales (figure III.14).

Le calcul rend compte, comme l'expérience, de la diminution du débit qui résulte du confinement de l'écoulement dans un canal cylindrique à l'amont du convergent conique (fig. III.16).

Conclusion

La présente communication a pour objet de fournir un moyen de calcul du champ transsonique des éjecteurs convergents tronconiques de révolution.

L'exposé théorique de la méthode dans la première partie en justifie les fondements, et la comparaison avec l'expérience, dans la troisième, permet d'en vérifier l'efficacité.

On peut résumer comme suit les principales conclusions de cette étude :

- la méthode proposée est une méthode exacte dans ses principes, dont la solution numérique est fournie après convergence d'un processus itératif.
- les calculs et les résultats d'essais sont en bon accord, surtout pour la détermination des données globales.

La méthode numérique contrôlée par comparaison avec l'expérience essentiellement dans le domaine de fonctionnement supercritique bloqué des éjecteurs permet d'étendre le champ des prévisions numériques au domaine de fonctionnement non bloqué, pour lequel les essais connus restent très fragmentaires.

Cette méthode doit permettre également d'étudier les effets systématiques de paramètres importants, soit aérodynamiques (rapport des chaleurs spécifiques γ par exemple), soit géométriques, concernant la forme du convergent, qui peut être représenté par un contour polygonal ou par un contour continu dont la cote n'est connue toutefois qu'a posteriori, après résolution dans un domaine hodographique donné en subsonique.

Références

- 1 - M. FENAIN - Méthodes numériques de résolution des problèmes d'écoulement mixte autour de profils. ONERA - N.T. non publiée - juillet 1969.
- 2 - M. FENAIN - Application des méthodes de résolution hodographique à l'étude de jets et de profils supercritiques. ONERA - N.T. non publiée - novembre 1970.
- 3 - J.L. SOLIGNAC - Etude expérimentale des éjecteurs convergents tronconiques. Note Technique ONERA N° 220, 1974.
- 4 - B. MASURE - Effet sur la viscosité et effet de viriel sur la mesure des débits par col sonique - Effet viriel sur une tuyère propulsive. Communication, XXVIIIème réunion de la Supersonic Tunnel Ass. ON DENVER 30 - 31 Oct. 1967.
- 5 - J.L. SOLIGNAC - Méthode de dépouillement des interférogrammes en écoulement de révolution. Rech. Aér. N° 104, 1965.
- 6 - P. DIRINGER - Réflexions régulières et singulières d'ondes de choc. Applications aux entrées d'air et au problème du disque de Mach. N.T. ONERA n° 183 (1971).
- 7 - B. MASURE - J.L. SOLIGNAC - P. LAVAL - Mass flow rate measurement by means of a sonic throat. Communication, Symposium sur les écoulements. Pittsburg (Pennsylvanie) 10 - 14 Mai 1971.

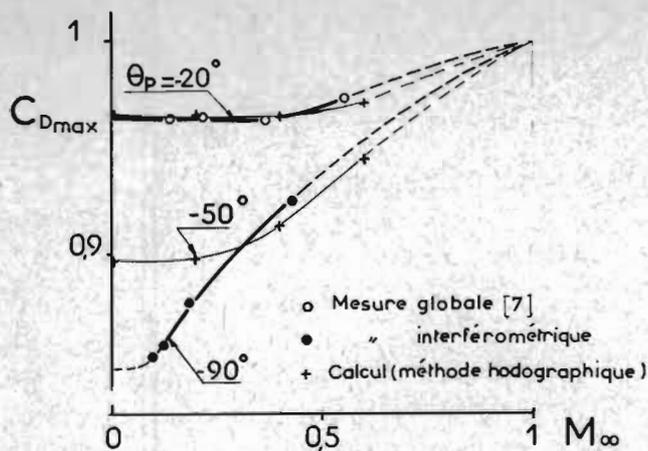


Figure III.16

La courbe expérimentale $C_{Dmax} = f(M_\infty)$ obtenue pour $\theta_p = -90^\circ$ présente néanmoins pour $M_\infty \geq 0.1$ une évolution particulièrement rapide, vraisemblablement due à la présence d'un décollement devant la lèvre de l'éjecteur.

III.4.4 - Coefficient de poussée

La corrélation débit-poussée confirme le bon accord calcul-expérience obtenu sur les résultats globaux (fig. III.17).

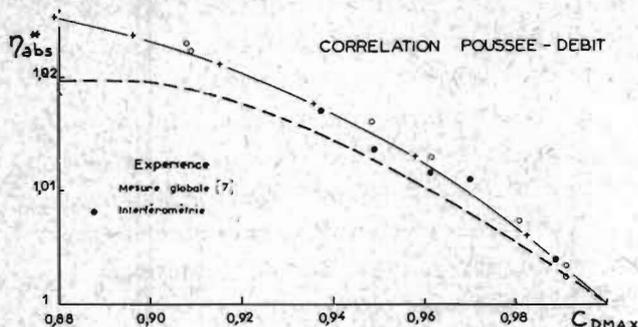


Figure III.17

III.4.5 - Résultats en régime non bloqué

Le calcul et l'expérience représentent avec un assez bon accord l'effet du taux de détente en régime non bloqué sur les coefficients de poussée η_{abs} ou de débit C_D (figure III.18).

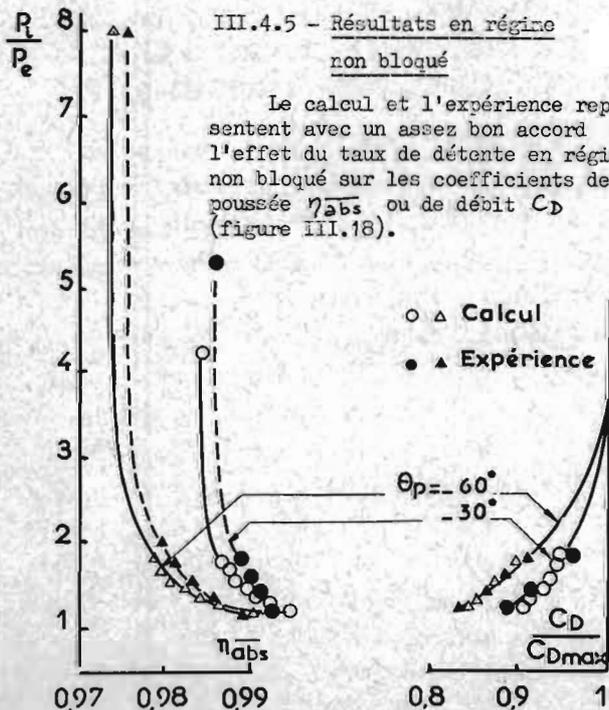


Figure III.18